독립심화학습 3주차

2017103580 김정운

최적제어문제는 control u를 조절하여 state x의 값을 설정하는데, cost function이라는 기준으로 u를 결정한다. State x는 미분방정식으로 기술되는 경우가 많은데, 이를 분석한 다음에 control을 구해야 한다. dx/dt=f(t,x(t),u(t)), x(t0)=x0, u(t0)=0, u(t)는 U의 원소라는 미분방정식이 있다고 하자. 해당 방정식이 locally asymptotically stable equilibrium을 가진다고 하면, 특정 초기값에서는 control에 상관없이 state가 equilibrium으로 수렴하게 된다. 이런 상황에서는 control으로 state 자체를 조절하는 것이 의미가 없으며, 수렴속도만을 조절하는 것이 가능하다. 반면 unstable equilibrium이 존재한다고 하면, control으로 state가 해당 값을 취하게 하는 것은 의미가 있다.

SIR모델이 가장 대표적인 예시인데, SIR모델은 감염에 취약한 사람 수와 감염자의 인구 수를 미분방정식으로 기술한 모형이다. 인구 수가 일정하다는 가정하에서 SIR모델은 2개의 equilibrium을 가지는데, 하나는 (c,0)이고 다른 하나는 (a,C/R)이다. 전자는 감염자가 존재하지 않다는 것을 의미하고, 후자는 최종적으로 감염된 인구 수를 말하며 질병에 따라 다른 값을 가진다. 모형에 따라 두 equilibrium 중 하나는 (asymptotically)stable할 수도 있고 그렇지 않을 수 있으며, 이에 따라 다른 대응방안이 결정되어야 한다. 예를 들어 (c,0)이 stable하거나 (c,0)와 (a,C/R)가 unstable이면, 시스템의 변화가 발생하기 전에 전염병이 퍼지는 것을 통제하여 감염자를 근절하는 것이 합리적이다. 반면, (a,C/R)이 stable하면 수렴속도를 늦춰서 대응방안을 마련할 수 있는 시간을 확보하는 것이 바람직 할 것이다. optimal control problem을 기존 방정식에 적용하여 현실 문제들을 해결하고자 하는 경우가 많기 때문에, equilibrium의 stability를 분석하는 것은 control의 효율성을 높이고 비용을 줄이는데 중요하다.

equilibrium을 분석하는 방법은 몇 가지 방법이 있다. 선형미분방정식 같은 경우에는 우선 행렬로 변환한 다음에 고유값을 얻는다. 만약 고유값이 모두 음수이면 stable이고 그 외는 unstable이다. 방정식이 비선형인 경우에는 2가지 방법이 있는데, 방정식을 선형으로 근사한 다음에 stability를 분석하거나 phase portrait를 그리는 것이 있다. 전자는 미분방정식에 대한 야코비안 행렬을 구한 다음에, equilibrium에서의 고유값을 구하여 stability를 분석한다. 이를 사용하기 위해서는 원래 미분방정식의 equilibrium을 사전에 알고 있어야 한다. 만약 모르는 경우에는 phase portrait를 그린 다음에, state trajectory를 살펴봄으로써 stability를 분석할 수 있다. Phase portrait는 미분방정식으로부터 state의 이동방향을 추정하고, 이를 바탕으로 state trajectory를 그래프로 그린 것을 말한다.

Phase portrait는 방정식이 단순하며 변수의 갯수가 적을 때 효과적인데, 그렇지 않은 경우에는 시뮬레이션으로 stability를 분석할 수 있다. 즉, 방정식에 기반하여 데이터를 생성해보는 것이다. 두가지 방법들은 컴퓨터의 발전으로 인해 고유값을 분석하는 방법보다 쉽게 stability를 분석할 수 있다. 하지만 데이터로 stability를 분석하는 것은 초기값과 실행시간에 의존하는데, 이로 인해 분석결과에 대한 신뢰성에 문제가 발생할 수 있다. 즉, 다양한 초기값과 이에 대응하는 trajectory 데이터를 활용하여 stability를 분석해야 한다. 또한 Phase portrait는 그래프를 통해 stability를 분석하기 때문에, 2개의 변수만이 있는 시스템에서만 사용할 수 있다. 그리고 시뮬레이션은 고차원에서 비효율적일 수 있는데, 경우의 수가 기하급수적으로 증가하기 때문이다. 즉, 차원의 저주(Curse of dimension)가(이) 발생한다는 것이다.